DM n° 9 -

Exercice 1

La matrice A est triangulaire supérieure et un des nombre sur la diagonale est nul.

Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_3 - 2L_2. \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \div 4 \\ L_2 \leftarrow L_2 \div 2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \div 4. \end{matrix}$$

Donc $\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

On trouve à l'aide de la méthode du pivot de Gauss:

$$\boxed{\begin{matrix} C \text{ est inversible et } C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 6 \end{pmatrix} \\[2em] D \text{ est inversible et } D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

Exercice 2

① f est bien définie si $x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$

et si $x > 0$

Donc $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$.

② (a) $P(1) = 3\times 1^3 - 1 - 2 = 0$ Donc 1 est une racine de P. Le polynôme P se factorise par $(x-1)$

(b)
$$\begin{array}{rrr|l} 3x^3 & -x & -2 & x-1 \\ \cline{4-4} -(3x^3 - 3x^2) & & & 3x^2+3x+2 \\ 3x^2 & -x & -2 & \\ -(3x^2 - 3x) & & & \\ \hline & 2x & -2 & \\ & 2x & -2 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$

(c) Le discriminant du polynôme $3x^2+3x+2$ est

$\Delta = 9 - 4\times 3\times 2 < 0$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $3x^2+3x+2 > 0$

Ainsi

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de P		$-$	0	$+$	

(d) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x}$

$$g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

D'où le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g.	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(e) Le minimum de la fonction est atteint pour $x=1$

et $g(1)=3$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \geqslant 3 > 0.}$

(3) (a) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que sommes et quotients de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$.

$\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f'(x) = 1 + 0 + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x\left(x-1+\ln(x)\right)}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2\left(x-1+\ln(x)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 + x + 1 - 2x + 2 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

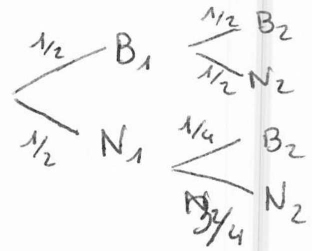
(b) On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x^3 > 0$ et $g(x) > 0$. (question 2e).

Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 3

① $p_1 = p(B_1) = \frac{1}{2}$ (on tire dans l'urne U_1).



(B_1, N_1) est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales.

$$p_2 = p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1)\, p_{N_1}(B_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$p_2 = \frac{3}{8}$$

② On a $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{1}{4}$.

$$p(B_1) \times p(B_2) = p_1 \times p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

$p(B_1 \cap B_2) \neq p(B_1) \times p(B_2)$. Les évènements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, (B_n, N_n) est un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(N_n)\, p_{N_n}(B_{n+1})$$

$$= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} p_n - \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4}.$$

④ On résout $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \iff \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}$

$$\iff x = \frac{1}{3}.$$

On pose alors $v_n = p_n - \frac{1}{3}$

On a $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$, $v_1 = -\frac{5}{2}$

(v_n) est géométrique avec $v_n = -\frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

on en déduit $p_n = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

On a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{3}$